Groupoïdes quantiques de transformations : Une approche algébrique et analytique

Frank TAIPE HUISA

Soutenance de thèse
Université de Caen Normandie, France

11 décembre 2018

Plan de l'exposé

Introduction

De groupes aux groupes quantiques

On considère $\mathcal{F}(G)$, l'algèbre des fonctions à valeurs complexes sur un groupe fini G. L'opération du groupe détermine une application

$$\Delta : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \equiv \mathcal{F}(G \times G), \quad f \mapsto \Delta(f)(g, g') = f(gg')$$

où l'associativité dans le groupe se traduit par l'egalité $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$ (coassociativité de Δ). L'existence d'un élement neutre $e \in G$ se traduit avec

$$\varepsilon : \mathcal{F}(G) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(e)$$

qui satisfait $(id \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes id)\Delta$. L'existence d'un inverse se traduit avec

$$S : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G), \quad f \mapsto S(f) : g \mapsto f(g^{-1})$$

qui satisfait $m(S \otimes id)\Delta(f) = \varepsilon(f)1$ et $m(id \otimes S)\Delta(f) = \varepsilon(f)1$. On obtient ainsi une algèbre de Hopf involutive et commutative $(\mathcal{F}(G), \Delta, S, \varepsilon)$.

On peut lui associer un “dual” qui est aussi une algèbre involutive de Hopf provenant du groupe : $(\mathbb{C}[G], \Delta', S', \varepsilon')$, où $\mathbb{C}[G]$ est l'algèbre de groupe et

$$\begin{array}{rccc} \Delta' : & \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \\ & g & \mapsto & g \otimes g \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} S' : & \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C}[G] \\ & g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

$$\varepsilon' : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \delta_{g,e}$$

Cette algèbre de Hopf involutive est co-comutative (i.e. $\Delta = \Sigma\Delta$, où Σ est la volte dans le produit tensoriel). En général, en utilisant des structures similaires, on peut définir des groupes quantiques dans

- le cadre algébrique :
  - Les groupes quantiques algébriques (A, Δ, φ).
- le cadre des algèbres d'opérateurs :
  - Les groupes quantiques C^*-algébriques $(C_0(\mathbb{G}), \Delta)$, $(C_r^*(\mathbb{G}), \widehat{\Delta})$.
  - Les groupes quantiques W^*-algébriques $(\mathcal{L}\mathbb{G}, \Delta)$, $(L^\infty\mathbb{G}, \widehat{\Delta})$.

Rmq : On s'intéresse principalement aux groupes quantiques qui ne sont ni commutatifs ni co-commutatifs.

Groupoïde

Définition

Un *groupoïde* est un ensemble $\mathscr{G}$ muni de deux opérations :

$$\cdot : \mathscr{G}^{(2)} \subseteq \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G} \qquad\qquad {}^{-1} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$$

(composition) (inverse)

tels que

- $(x^{-1})^{-1} = x$ pour tout $x \in \mathscr{G}$,
- $(x, y), (y, z) \in \mathscr{G}^{(2)} \Rightarrow (xy, z), (x, yz) \in \mathscr{G}^{(2)}$ et $(xy)z = x(yz)$,
- $(x^{-1}, x) \in \mathscr{G}^{(2)}$ et si $(x, y) \in \mathscr{G}^{(2)}$, alors $x^{-1}(xy) = y$,
- $(x, x^{-1}) \in \mathscr{G}^{(2)}$ et si $(z, x) \in \mathscr{G}^{(2)}$, alors $(zx)x^{-1} = z$.

Notations :

- $\mathscr{G}^{(2)}$ (*l'ensemble de paires composables de* $\mathscr{G}$)
- $\mathscr{G}^{(0)} := \{x^{-1}x \ : \ x \in \mathscr{G}\}$ (*l'espace des unités de* $\mathscr{G}$)

Rmq : $\mathscr{G}^{(0)}$ est un singleton ssi $\mathscr{G}$ est un groupe.

Si on considère l'application *source* et l'application *but*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathscr{G} & \rightarrow & \mathscr{G} \\ & x & \mapsto & x^{-1}x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} r: & \mathscr{G} & \rightarrow & \mathscr{G} \\ & x & \mapsto & xx^{-1} \end{array}$$

on a

$$\mathscr{G}^{(2)} = \mathscr{G}\,{}_d\!\times_r \mathscr{G} := \left\{(x,y) \in \mathscr{G}^2 \ : \ d(x) = r(y)\right\},$$

et

$$\mathscr{G}^{(0)} = d(\mathscr{G}) = r(\mathscr{G}).$$

Exemple : Le groupoïde de transformations

Considérons $\cdot : G \times S \to S$, une action d'un groupe G sur un ensemble S. L'ensemble $G \curvearrowright S := G \times S$ muni des opérations

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & (G \curvearrowright S)^{(2)} & \to & G \curvearrowright S \\ & ((g,s),(h,t)) & \mapsto & (gh,t) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} ^{-1} : & G \curvearrowright S & \to & G \curvearrowright S \\ & (g,s) & \mapsto & (g^{-1}, g \cdot s) \end{array}$$

où

$$(G \curvearrowright S)^{(2)} := \left\{((g,s),(h,t)) \in (G \curvearrowright S)^2 \;:\; s = h \cdot t\right\},$$

définit un groupoïde appelé *le groupoïde de transformations*. Pour ce groupoïde, on a

$$(G \curvearrowright S)^{(0)} = \{e\} \times S \simeq S$$

et ses applications source et but sont

$$\begin{array}{rccc} d : & G \curvearrowright S & \to & S \\ & (g,s) & \mapsto & s \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} r : & G \curvearrowright S & \to & S \\ & (g,s) & \mapsto & g \cdot s \end{array}$$

Quantification des groupoïdes

Quantification d'un groupoïde usuel

groupoïde	**objet associé**
$\mathscr{G}$	$\mathcal{F}(\mathscr{G})$
$\mathscr{G}^{(0)}$	$\mathcal{F}(\mathscr{G}^{(0)})$
$d : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$	$d^* : \mathcal{F}(\mathscr{G}^{(0)}) \to \mathcal{F}(\mathscr{G})$
$r : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$	$r^* : \mathcal{F}(\mathscr{G}^{(0)}) \to \mathcal{F}(\mathscr{G})$
$\cdot : \mathscr{G}\,{}_d\!\times_r \mathscr{G} \to \mathscr{G}$	$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{F}(\mathscr{G}) & \to & \mathcal{F}(\mathscr{G})_{d^*} \otimes {}_{r^*}\mathcal{F}(\mathscr{G}) \\ & f & \mapsto & \Delta(f) : (g, g') \in \mathscr{G}^{(2)} \mapsto f(gg') \end{array}$
+	+
conditions	conditions

Idée générale de quantification

groupoïde	**groupoïde quantique**
$\mathscr{G}$	A (algèbre totale)
$\mathscr{G}^{(0)}$	B (algèbre partielle)
$d : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$	$\alpha : B \hookrightarrow A$ (homomorphisme)
$r : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$	$\beta : B \hookrightarrow A$ (anti-homomorphisme)
$\cdot : \mathscr{G}\, {}_d\!\times_r \mathscr{G} \to \mathscr{G}$	$\Delta : A \to A\, {}_\alpha\!\otimes_\beta A$ (coproduit)
+	+
conditions	conditions

Motivation

Théories existantes des groupoïdes quantiques :

- Langage des C^*-algèbres de dimension finie : Groupoïdes quantiques finis (Böhm, Nill, Szlachányi, Vainerman, Nikshych, Vallin).
- Langage des algèbres de von Neumann : Groupoïdes quantiques mesurés (Lesieur, Enock, Vallin).
- Il n'y a pas de théorie générale dans le langage des C^*-algèbres mais il y a des travaux dans cette direction : Timmermann, Khang - Van Daele.

Motivation : Construction des exemples des groupoïdes quantiques dans le cadre des algèbres d'opérateurs (C^*-algèbres).

Thèse : Développer une théorie des groupoïdes quantiques de transformations.

Les ingrédients d'un groupoïde de transformations $\mathscr{G} = G \curvearrowright S$ sont un groupe G, un ensemble S et une action de G on S, $\cdot : G \times S \to S$. Alors, on voudrait

Théorie usuelle		**Théorie quantique**
G	$\rightsquigarrow$	$\mathbb{G}$: groupe quantique
S	$\rightsquigarrow$	X : une algèbre
$\cdot : G \times S \to S$	$\rightsquigarrow$	$\mathbb{G} \curvearrowright X$: une action de $\mathbb{G}$ sur X

et construire d'une maniere semblable un groupoïde quantique de transformations, mais

IL NE SUFFIT PAS D'AVOIR UNE SEULE ACTION

Solution [Lu]

Il faut une action de $\mathbb{G}$ sur X, une action de son dual quantique $\widehat{\mathbb{G}}$ sur X, plus une relation de compatibilité entre eux : Il faut que X soit une algèbre de *Yetter-Drinfeld tressée commutative.*

Contexte

Groupoïde quantique de transformations :

- **J.H. Lu (1996) :**
  - Ingrédients : une algèbre de Yetter-Drinfeld tressée commutative dans le contexte des algèbres de Hopf.
  - Algébroïde de Hopf (Lu).
  - (+) La construction est purement algébrique
  - (-) On ne peut pas construire un "dual" quantique.
- ***M.* Enock et T. Timmermann (2017) :**
  - Ingrédients : une algèbre de Yetter-Drinfeld tressée commutative dans le contexte des groupes quantiques W^*-algébriques (Kustermans-Vaes).
  - Bimodule de Hopf von Neumann (au sens de Vallin), plus exactement on a un groupoïde quantique mesuré au sens de Lesieur-Enock.
  - (+) Il est possible de construire un dual quantique.
  - (-) Dépend fortement de la théorie modulaire de Tomita-Takesaki.

Quantification d'un groupoïde de transformations

groupoïde de transformations	**groupoïde quantique de transformations**
groupe : G	groupe quantique : $\mathbb{G}$
ensemble : S	algèbre : X
action : $G \times S \to S$	actions : $\mathbb{G} \curvearrowright X$ $\widehat{\mathbb{G}} \curvearrowright X$
$G \curvearrowright S = G \times S$	produit croisé : $\mathbb{G} \ltimes X$
S	X
$d : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$	$\alpha : X \hookrightarrow \mathbb{G} \ltimes X$
$r : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$	$\beta : X^{op} \hookrightarrow \mathbb{G} \ltimes X$
$\cdot : \mathscr{G}\,{}_d\!\times_r \mathscr{G} \to \mathscr{G}$	coproduit $\Delta : \mathbb{G} \ltimes X \to (\mathbb{G} \ltimes X)\,{}_\alpha\!\otimes_\beta (\mathbb{G} \ltimes X)$
+	+
conditions	conditions

Plan de la thèse

$$
\begin{tikzcd}
\text{Construction algébrique} \arrow[rr, bend left, "\text{GNS-construction}"] & & \text{Construction } C^*\text{-algébrique} \arrow[dl, leftrightarrow, bend left, "\text{comparaison}"] \\
& \text{Construction } W^*\text{-algébrique (Enock et Timmermann)} \arrow[ul, bend left, "\text{donne les idées}"] &
\end{tikzcd}
$$

Groupoïdes quantiques de transformations : cadre algébrique

Groupe quantique algébrique

Définition [Van Daele]

Un *groupe quantique algébrique* est $\mathbb{G} := (A, \Delta, \varphi)$ où

- $\Delta : A \to \mathcal{M}(A \otimes A)$ est un *-homomorphisme tel que (A, Δ) est une algèbre de Hopf de multiplicateurs involutive.
- $\varphi : A \to \mathbb{C}$ est une intégrale de Haar à gauche pour (A, Δ), i.e. elle est positive, fidèle et invariante à gauche

$$(if \otimes \varphi)(\Delta(a)) = \varphi(a) 1_{\mathcal{M}(A)}.$$

Exemple : Si G est un groupe, la *-algèbre des fonctions à valeurs complexes de support fini $A := \mathrm{Fun}_f(G)$ avec les applications

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & A & \to & \mathcal{M}(A \otimes A) \\ & p & \mapsto & [\Delta(p) : (g, g') \mapsto p(gg')] \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi : & A & \to & \mathbb{C} \\ & p & \mapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} p(g) \end{array}$$

est un groupe quantique algébrique.

Il y a des objets associés à un groupe quantique algébrique.

- $\widehat{\mathbb{G}} = (\widehat{A}, \Delta, \widehat{\varphi})$ son dual quantique. Ici $\widehat{A} = \{\varphi(\cdot a) \in A^\vee \ : \ a \in A\}$.
- Son algèbre de Heisenberg $H(\mathbb{G})$ (une algèbre qui contient A et $\widehat{A}$ avec une relation entre eux).
- L'unitaire multiplicatif algébrique $U \in \mathcal{M}(A \otimes \widehat{A})$ tel que

$$\Delta(a) = U^*(1 \otimes a)U$$

dans $\mathcal{M}(A \otimes H(\mathbb{G}))$.

Avantage de ces groupes quantiques : En utilisant l'intégral de Haar, par la procédure GNS, on peut construire un groupe quantique C^*-algèbrique G_r dans le cadre des algèbres d'opérateurs.

On peut considérer une action d'un groupe quantique $\mathbb{G}$ sur X, i.e un *-homomorphisme $\alpha : X \to \mathcal{M}(A \otimes X)$ qui vérifie les conditions

- $(\Delta \otimes id)\alpha = (id \otimes \alpha)\alpha$
- $\alpha(X)(A \otimes 1) = A \otimes X$ et $\alpha(X)(1 \otimes X) \subseteq A \otimes X$ (réduit).

Pour une action on peut construire

- $\mathbb{G} \ltimes_\alpha X := \left\{(\omega \otimes 1)\alpha(x) \;:\; \omega \in \widehat{A}, x \in X\right\}$ le produit croisé de $\mathbb{G}$ et X qui utilise α.
- Si on munit X d'une fonctionnelle $\mu : X \to \mathbb{C}$ telle que

  $$(id \otimes \mu)(\alpha(x)) = \mu(x)1_{\mathcal{M}(A)}$$

  pour tout $x \in X$ (α-invariante), alors il existe $U_\mu^\alpha \in \mathrm{End}(A \otimes X)$ tel que

  $$\alpha(x) = (U_\mu^\alpha)^*(1 \otimes x)U_\mu^\alpha$$

  dans $\mathrm{End}(A \otimes X)$.

Définition [c.f. Nest-Voigt]

Une *algèbre de Yetter-Drinfeld sur* $\mathbb{G}$ est un triplet $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ où X est une algèbre involutive non-dégénérée, $\alpha : X \to \mathcal{M}(A \otimes X)$ est une action de $\mathbb{G}$ et $\widehat{\alpha} : X \to \mathcal{M}(\widehat{A} \otimes X)$ est une action à gauche de $\widehat{\mathbb{G}}$ telles que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\widehat{\alpha}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{M}(\widehat{A} \otimes X) \arrow[r, "id \otimes \alpha"] & \mathcal{M}(\widehat{A} \otimes A \otimes X) \\
\mathcal{M}(A \otimes X) \arrow[r, "id \otimes \widehat{\alpha}"'] & \mathcal{M}(A \otimes \widehat{A} \otimes X) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(U) \otimes id"'] & \mathcal{M}(A \otimes \widehat{A} \otimes X) \arrow[u, "\Sigma \otimes id"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Rmq : $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ algèbre de YD sur $\mathbb{G}$ sii $(X, \widehat{\alpha}, \alpha)$ algèbre de YD sur $\widehat{\mathbb{G}}$.

On suppose dès maintenant que $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ est muni d'une intégrale de Yetter-Drinfeld μ, i.e. $\mu : X \to \mathbb{C}$ est une fonctionelle positive, fidèle, α-invariante, $\widehat{\alpha}$-invariante et vérifiant certaines conditions analytiques.

Définition [c.f. Enock-Timmermann]

Considérons l'anti-*-homomorphisme injectif

$$\begin{array}{rccc} \beta_{\alpha,\widehat{\alpha}} : & X & \to & \mathrm{End}(A \otimes X) \\ & x & \mapsto & U_\mu^\alpha \widehat{\alpha}^\circ(x^\circ)(U_\mu^\alpha)^* \end{array}$$

On dit que l'algèbre de Yetter-Drinfeld $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ est *tressée commutative* si

$$\beta_{\alpha,\widehat{\alpha}}(X) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{G} \ltimes_\alpha X).$$

Rmq : $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ algèbre de YD tressée commutative sur $\mathbb{G}$ sii $(X, \widehat{\alpha}, \alpha)$ algèbre de YD tressée commutative sur $\widehat{\mathbb{G}}$.

Groupoïde quantique algébrique de transformations

Théorème [T.]

Soit $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ une algèbre involutive de Yetter-Drinfeld tressée commutative sur $\mathbb{G}$ et $\mu : X \to \mathbb{C}$ une intégrale de Yetter-Drinfeld. Alors le tuple

$$(\mathbb{G} \ltimes_\alpha X, X, \alpha, \beta_{\alpha,\widehat{\alpha}}, \Delta_\alpha, \tilde{R}, \tilde{\varepsilon}, \mu, \Omega)$$

où

$$\begin{array}{rccc} \Delta_\alpha : & \mathbb{G} \ltimes_\alpha X & \to & (\mathbb{G} \ltimes_\alpha X) \overset{\alpha}{\times} (\mathbb{G} \ltimes_\alpha X) \\ & (\omega \otimes 1)\alpha(x) & \mapsto & (\omega_{(2)} \otimes 1)\alpha(x) \overset{\alpha}{\times} (\omega_{(1)} \otimes 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{R} : & \mathbb{G} \ltimes_\alpha X & \to & \mathbb{G} \ltimes_\alpha X \\ & \alpha(x)(\omega \otimes 1) & \mapsto & (\widehat{R}(x^{[-1]} \cdot \omega) \otimes 1)\alpha(x^{[0]}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varepsilon} : & \mathbb{G} \ltimes_\alpha X & \to & \alpha(X) \\ & \alpha(x)(\omega \otimes 1) & \mapsto & \widehat{\psi}(\omega)\alpha(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Omega : & \mathbb{G} \ltimes_\alpha X & \to & \alpha(X) \\ & (\omega \otimes 1)\alpha(x) & \mapsto & \widehat{\varphi}(\omega)\alpha(x) \end{array}$$

est un algébroïde de Hopf de multiplicateurs involutif mésuré dans le sense de Timmermann-Van Daele.

Remarque

Cet objet est appelé un groupoïde quantique algébrique de transformations associé à l'algébre de Yetter-Drinfeld tressée commutative $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ et à l'intégrale μ.

Exemple :

$$\begin{array}{ccc} \text{groupe } G & \rightsquigarrow & \mathbb{G} = (\mathsf{Fun}_f(G), \Delta, \varphi) \\ \text{ensemble } S & \rightsquigarrow & X = \mathsf{Fun}_f(S) \\ \text{action } \cdot : G \times S \to S & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} \alpha : \delta_s \mapsto \sum_{g \in G} \delta_g \otimes \delta_{g^{-1} \cdot s} \\ \widehat{\alpha} : \delta_s \mapsto U_e \otimes \delta_s \end{array} \end{array}$$

- $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ algèbre de Yetter-Drinfeld tressée commutative sur $\mathbb{G}$ et

$$\mathbb{G} \ltimes_\alpha \mathsf{Fun}_f(S) = \mathbb{C}[G \curvearrowright S],$$

$$\alpha : \delta_s \mapsto U_{(e,s)}, \qquad \beta_{\alpha,\widehat{\alpha}} : \delta_s \mapsto U_{(e,s)}$$

$$\begin{array}{rccc} \Delta_{\widehat{\alpha}}: & \mathrm{Fun}_f(G \curvearrowright S) & \to & \mathrm{Fun}_f(G \curvearrowright S) \overset{\widehat{\alpha}}{\times} \mathrm{Fun}_f(G \curvearrowright S) \cong \mathcal{M}(\mathrm{Fun}_f((G \curvearrowright S)^{(2)})) \\ & p & \mapsto & [\Delta(p)((g,s),(h,t)) \mapsto p(gh,t)] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{R}: & \mathrm{Fun}_f(G \curvearrowright S) & \to & \mathrm{Fun}_f(G \curvearrowright S) \\ & p & \mapsto & \sum_{g,s} p(g, g^{-1} \cdot s)\delta_{(g^{-1},s)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varepsilon}: & \mathrm{Fun}_f(G \curvearrowright S) & \to & \mathrm{Fun}_f(S) \\ & p & \mapsto & \sum_{s} p(e,s)\delta_{(e,s)} \end{array}$$

- $(X, \widehat{\alpha}, \alpha)$ algèbre de Yetter-Drinfeld tressée commutative sur $\widehat{\mathbb{G}}$ et

$$\widehat{\mathbb{G}} \ltimes_{\widehat{\alpha}} \mathrm{Fun}_f(S) = \mathrm{Fun}_f(G \curvearrowright S), \quad \widehat{\alpha} : \delta_s \mapsto \sum_g \delta_{(g,s)}, \quad \beta_{\widehat{\alpha},\alpha} : \delta_s \mapsto \sum_g \delta_{(g,g^{-1}\cdot s)}$$

Groupoïdes quantiques de transformations : cadre analytique

Définitions des objets nécessaires

On va utiliser des objets introduits par T. Timmermann.

- **Une C^*-base :** $\mathfrak{b} = (\mathfrak{K}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\dagger)$
  - $\mathfrak{K}$ espace Hilbertien, $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\dagger \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ C^*-algèbres, $[\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\dagger] = 0$ dans $\mathcal{B}(\mathfrak{K})$.
  - $\mathfrak{b}^\dagger := (\mathfrak{K}, \mathfrak{B}^\dagger, \mathfrak{B})$ est appelé la C^*-base opposé de $\mathfrak{b}$.
  - Exemple : $\mathfrak{b} = (L^2_\mu X, \overline{\pi_\mu(X)}^{\|\cdot\|}, \overline{J_\mu \pi_\mu(X) J_\mu}^{\|\cdot\|})$ pour une algèbre Yetter-Drinfeld tressée commutative X muni d'une intégrale de Yetter-Drinfeld μ.
- **Un C^*-module sur $\mathfrak{b}$:** $\mathcal{H}_E$
  - $E \subseteq \mathcal{B}(\mathfrak{K}, \mathcal{H})$ sous-espace fermé tel que $[E(\mathfrak{K})] = \mathcal{H}$, $[E\mathfrak{B}] = E$ et $[E^* E] = \mathfrak{B}$.
  - On obtient un C^*-$\mathfrak{B}$-module Hilbertien E et une *-représentation fidèle non-dégénérée $\rho_E : \mathfrak{B}^\dagger \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
  - Exemple : Si $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ est une algèbre de Yetter-Drinfeld tressée commutative réduite sur $\mathbb{G}$ et μ est une intégrale de Yetter-Drinfeld, alors si $\mathcal{H} := L^2\mathbb{G} \otimes L^2_\mu X$, $E = E(\alpha, \widehat{\alpha}) := [U^\alpha_\mu (\widehat{U^\alpha_\mu})^* | \Lambda(a) \rangle_1 \pi_\mu(x)]$ et $F = F(\alpha, \widehat{\alpha}) := [U^\alpha_\mu | \Lambda(a) \rangle_1 J_\mu \pi_\mu(x) J_\mu]$. On a :
    - $\mathcal{H}_E$ est un C^*-module sur $\mathfrak{b}$.
    - $\mathcal{H}_F$ est un C^*-module sur $\mathfrak{b}^\dagger$.

    Rmq $| \Lambda(a) \rangle_1 : \Lambda_\mu(x) \mapsto \Lambda(a) \otimes \Lambda_\mu(x)$

    $\langle \Lambda(a) |_1 := | \Lambda(a) \rangle_1^* : \Lambda(b) \otimes \Lambda_\mu(x) \mapsto \langle a , b \rangle_\varphi \Lambda_\mu(x)$

- **Une C^*-algèbre sur $\mathfrak{b}$: $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{E}$**
  - $\mathcal{H}_E$ C^*-module sur $\mathfrak{b}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ C^*-algèbre non-dégénérée, $\rho_E(\mathfrak{B}^\dagger)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.
  - Exemple : Si $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ est une algèbre de Yetter-Drinfeld tressée commutative réduit sur $\mathbb{G}$ et μ est une intégrale de Yetter-Drinfeld, alors si $\mathcal{A} := C_0(\mathbb{G} \ltimes_{\alpha}^{\mathrm{red}} X)$ est la completion réduite du produit croisé $\mathbb{G} \ltimes_\alpha X$. On a :
    - $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{E}$ est une C^*-algèbre sur $\mathfrak{b}$.
    - $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F}$ est une C^*-algèbre sur $\mathfrak{b}^\dagger$.
- **Un C^*-bimodule de Hopf sur $\mathfrak{b}$: $(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}, \Delta)$**
  - $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{E}$ C^*-algèbre sur $\mathfrak{b}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F}$ C^*-algèbre sur $\mathfrak{b}^\dagger$,
  - $\Delta : \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E} \to \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E} \underset{\mathfrak{b}}{*} \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}$ un *-homomorphisme tel que $(\Delta \underset{\mathfrak{b}}{*} id)\Delta = (id \underset{\mathfrak{b}}{*} \Delta)\Delta$.

  Rmq : $\mathcal{A} {}_E \underset{\mathfrak{b}}{*} {}_F \mathcal{A} = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H} {}_E \underset{\mathfrak{b}}{\otimes} {}_F \mathcal{H}) \ : \ T^* |\, F\rangle_2 \subseteq [|\, F\rangle_2 \mathcal{A}], T^* |\, E\rangle_1 \subseteq [|\, E\rangle_1 \mathcal{A}]\}$
- **Une co-involution pour un C^*-$\mathfrak{b}$-bimodule de Hopf $(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}, \Delta)$:**
  - $R : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $R^2 = id_{\mathcal{A}}$, $R(\rho_F(\mathfrak{B})) = \rho_E(\mathfrak{B}^\dagger)$, $\Delta R = \Sigma(R {}_E \underset{\mathfrak{b}}{*} {}_F R)\Delta$.
- **Un poids de Haar à gauche pour un C^*-$\mathfrak{b}$-bimodule de Hopf $(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}, \Delta)$:**
  - $\Phi : \mathcal{M}_\Phi \subseteq \mathcal{A} \to \rho_F(\mathfrak{B})$ poids à valeurs opératorielles.
  - $(id {}_E \underset{\mathfrak{b}}{*} {}_F \Phi)(\Delta(x)) = \Phi(x) {}_E \underset{\mathfrak{b}}{\otimes} {}_F 1$ for all $x \in \mathcal{M}_\Phi^+ = \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{M}_\Phi$.

Groupoïde quantique C^*-algébrique de transformations

Théorème [T.]

Soit $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ une algèbre involutive de Yetter-Drinfeld tréssée commutative sur un groupe quantique algébrique $\mathbb{G}$ et $\mu : X \to \mathbb{C}$ une intégrale de Yetter-Drinfeld. Alors, il existe un *-homomorphisme ${}^E\Delta^F : \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E} \to \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E} \underset{\mathfrak{b}}{*} \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}$, un anti-automorphisme ${}^E R^F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et un poids à valeurs opératorielles ${}^E\Phi^F$ de $\mathcal{A}$ vers $\rho_F(\mathfrak{B})$ telles que

- La paire $(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}, {}^E\Delta^F)$ est un C^*-bimodule de Hopf sur la C^*-base $\mathfrak{b}$.
- ${}^E R^F$ est une co-involution pour le C^*-$\mathfrak{b}$-bimodule de Hopf $(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}, {}^E\Delta^F)$.
- ${}^E\Phi^F$ est un poids de Haar à gauche pour le C^*-$\mathfrak{b}$-bimodule de Hopf $(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}, {}^E\Delta^F)$.

Définition

Le tuple $(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^{F,E}, {}^E\Delta^F, {}^E R^F, {}^E\Phi^F)$ est appelé un groupoïde quantique C^*-algébrique de transformations associé à l'algébre de Yetter-Drinfeld tressée commutative $(X, \alpha, \widehat{\alpha})$ et à l'intégrale μ.

Exemple (Coidéal de type quotient) : Soit $\mathbb{G} = (A, \Delta_A, \varphi_A)$ un groupe quantique algébrique et $\mathbb{H} = (B, \Delta_B, \varphi_B)$ un sous-groupe quantique algébrique fermé de $\mathbb{G}$, i.e. il existe $\Phi : A \to \mathcal{M}(B)$ *-homomorphisme surjectif non-dégénérée tel que $(\Phi \otimes \Phi)\Delta_A = \Delta_B \Phi$. On définit l'application $\gamma : a \in A \to (id \otimes \Phi)(\Delta_A(a)) \in \mathcal{M}(A \otimes B)$ et on pose $I = \{a \in A \ : \ \gamma(a) = a \otimes 1\}$, alors

- $\alpha = \Delta_A|_I$ action de $\mathbb{G}$ sur I.
- $\widehat{\alpha} = Ad_{\mathbb{G}}|_I$ action de $\widehat{\mathbb{G}}$ sur I.
- $(I, \alpha, \widehat{\alpha})$ algèbre de Yetter-Drinfeld tressée commutative sur $\mathbb{G}$.

Merci de votre attention